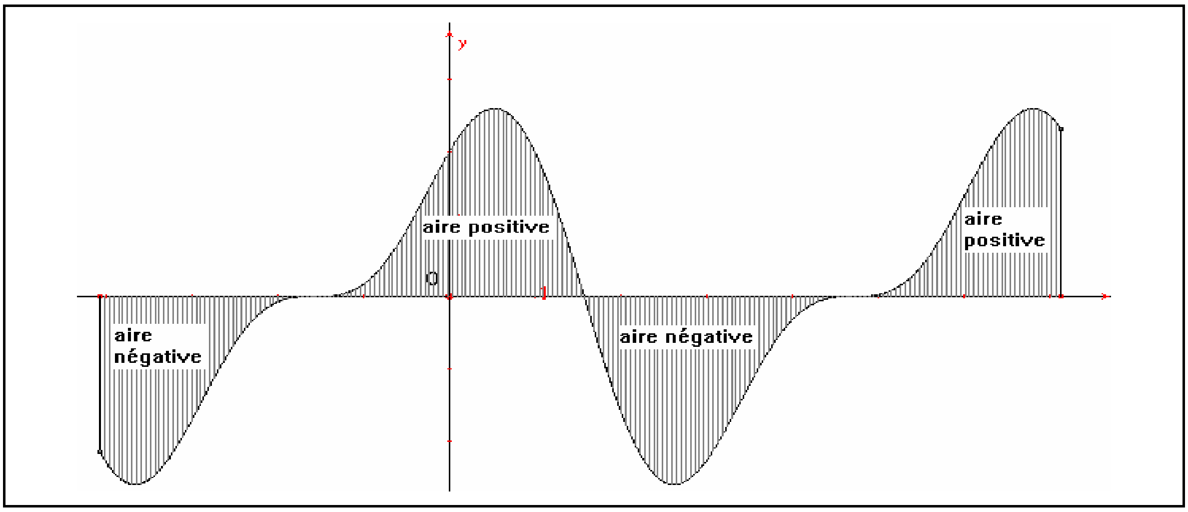
§5 Généralisation et propriétés de l'intégrale définie

5.1 Aire algébrique

En définissant l'intégrale définie $\int_a^b f(x)dx$, l'aire de la figure comprise entre le graphique Γ de f, l'axe des abscisses (OI) et les verticales x = a et x = b, la fonction f était **positive** sur l'intervalle [a,b]. Dans le cas où la fonction f est **négative** sur l'intervalle [a,b], la définition et le calcul de l'intégrale définie restent semblables mais, évidemment le résultat sera négatif ; en effet dans la somme $S'_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot\Delta_i x$, les $f(\xi_i)$ sont négatifs (les $\Delta_i x$ restant positifs).

L'intégrale définie garde son sens géométrique, mais cette aire est affectée d'un signe, soit le signe positif si le graphique est au dessus de l'axe des abscisses (OI), soit le signe négatif si le graphique est au dessous de (OI).

$\int_a^b f(x)dx$ représente donc une **aire algébrique.**



5.2 Propriétés de l'intégrale définie

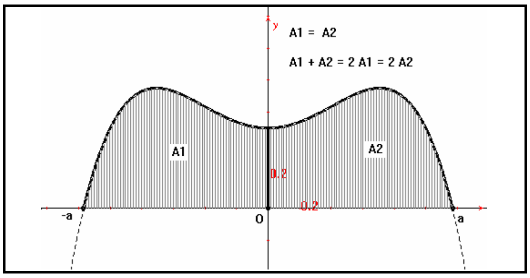
1) $\int_a^b (\alpha f(x) \pm \beta g(x))\, dx = \alpha \int_a^b f(x)\, dx \pm \beta \int_a^b g(x)\, dx$, $\forall \{a,b\} \subset \mathbb{R}$ (découle de la propriété 1) des primitives)

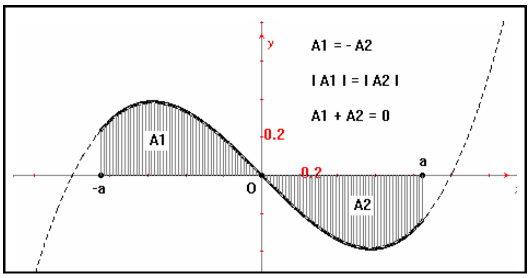
2) i) $\int_a^a f(x)dx = 0$ ii) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

iii) $\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx$ iv) Si $f(x) \leqslant g(x)$, $\forall x \in [a,b]$, alors $\int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b g(x)dx$

3) a) Si f est paire dans l'intervalle [-a,a],

alors $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)\, dx$





b) Si f est impaire dans l'intervalle [-a,a],

alors $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$

démonstrations en exercice.

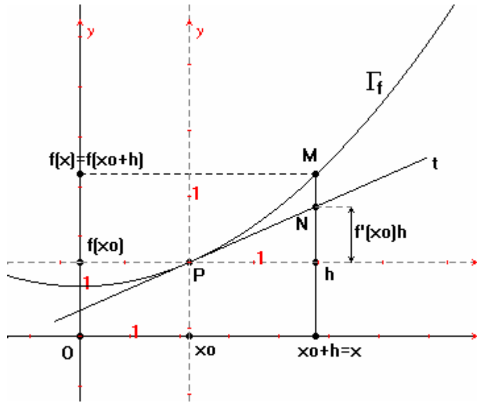
§6 Notion de différentielle[1]

6.1 Rappel :

La fonction f est dite dérivable en x_0 si $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$

existe dans ℝ , avec $f'(x_0)$ pente de la tangente t à Γ_f au point $P(x_0,f(x_0))$. En d'autres termes, la droite t " approche " le graphique Γ_f au voisinage de x_0, l'erreur commise sur les ordonnées étant négligeable en regard de l'accroissement $h = x - x_0$ ($\Leftrightarrow$ $x = x_0+h$).

Une équation cartésienne de t est $t : y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$;



6.2 Interprétation :

comme $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - \left(f(x_0)+ f'(x_0)(x-x_0)\right)}{x-x_0} = 0$

et donc $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) - \left(f(x_0)+ f'(x_0)(x-x_0)\right) = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) - \left(f(x_0)+ f'(x_0)\cdot h\right) = 0$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) - \left(f(x_0)+ f'(x_0)\cdot h\right) = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \overline{MN} = 0$

Interprétation géométrique : si f est dérivable en x_0, alors il existe une droite t, contenant le point $P(x_0,f(x_0))$, telle que pour x proche de x_0, le nombre f(x) est proche de l'ordonnée du point de t ayant la même abscisse x .

Interprétation analytique : si f est dérivable en x_0, il existe une application linéaire, noté df_{x_0} définie de ℝ dans ℝ telle que $df_{x_0}(h) = ah$, où $a = f'(x_0)$, et dont le graphique est la droite t, tangente à Γ_f au point $P(x_0,f(x_0))$.

Cette application df_{x_0} s'appelle la **différentielle** de f en x_0 : elle est l'unique approximation linéaire de f au voisinage de x_0 . Une telle fonction f est dite **différentiable** en x_0 .

Note : d'après ce qui précède, les notions de dérivabilité et de différentiabilité en x_0 sont équivalentes.

Exemples :

1) si $f(x) = x$, alors $df_{x_0}(h) = 1\cdot h = h$
2) si $f(x) = c$, alors $df_{x_0}(h) = 0\cdot h = 0$
3) si $f(x) = x^2$, alors $df_{x_0}(h) = (2x_0)\cdot h$ et la différentielle df_{x_0} dépend ici de x_0 .

6.3 De divers abus :

Historiquement, la notion de différentielle comme application linéaire a été formulée bien après la mise au point du calcul différentiel. Pour les besoins de la pratique, on commet certains abus simplificateurs. Le plus important consiste, lorsqu'on a une fonction f donnée par $y = f(x)$, à noter cette fonction f par y (alors que y n'est que la valeur de la fonction f en un $x \in D_f$).

[1] *De façon beaucoup moins rigoureuse que Newton en apparence, Leibniz utilise la notion d'infiniment petit. Si x est une quantité variable, il note dx un accroissement infinitésimal de cette quantité. Si une quantité y dépend de x, par exemple $y = x^2$, alors $dy = (x+dx)^2 - x^2 = x^2 + 2xdx + (dx)^2$ et donc $dy = 2xdx + (dx)^2$. A ce niveau, Leibniz dit que le terme $(dx)^2$ est négligeable devant le terme 2xdx et le considère tout simplement comme nul, d'où : dy = 2xdx.*
Le manque de rigueur annoncé se situe à ce niveau. A priori, une quantité est nulle ou ne l'est pas. Elle ne peut pas l'être quand on le désire et ne plus l'être quand on ne le veut pas. Cette difficulté fut levée par Cauchy au début du XIXème siècle grâce à la notion de limite, mais elle fit perdre la richesse intuitive de l'idée d'infiniment petit. Elle évitait cependant bien des erreurs à ceux qui n'arrivaient pas à acquérir facilement l'intuition de ce qu'est un infiniment petit. La difficulté ne fut résolue complètement que par Abraham Robinson dans la seconde moitié du XXème avec l'analyse non standard. Il nomma son invention ainsi par opposition à l'analyse classique qui se trouve donc considérée comme standard. Dans cette analyse non standard, on manipule donc des infiniments petits "actuels" par opposition aux infiniments petits "potentiels" de l'analyse classique. Le mot potentiel signifie ici que, quel que soit le nombre e > 0 envisagé, il existe des nombres strictement plus petits. Derrière cette idée, la notion de limite n'est pas loin.

Soit f une fonction différentiable en x_0 et df_{x_0} sa différentielle en x_0 :

1) dans df_{x_0} on remplace f par y et on omet l'indice x_0 et on note dy (ou df) la valeur de dy(h), d'où : $\boxed{dy = f'(x_0)\cdot h}$; dy est alors un nombre (considéré comme " variable dépendante " de x_0 et de h).
Voici quelques conséquences de cet abus : si l'on pose $\Delta y = f(x_0 + h) - f(x_0)$, on a :

$$\lim_{x\to x0} f(x)-\left(f(x_0)+f'(x_0)\cdot h\right)=0 \iff \lim_{x\to x0}\left(f(x)-f(x_0)\right)-f'(x_0)\cdot h=0 \iff \lim_{x\to x0}\left(\Delta y - dy\right)=0$$

De plus, si $f'(x_0) \neq 0$, on a $\lim\limits_{x\to x0}\frac{\Delta y}{dy}=\lim\limits_{x\to x0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{f'(x_0)\cdot h}=\lim\limits_{x\to x0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot\frac{1}{f'(x_0)}=1$ d'où $\lim\limits_{x\to x0}\frac{\Delta y}{dy}=1$;

c'est cette dernière relation qui incite le physicien à remplacer, pour h ® 0 (ou x ® x_0), Dy par dy .

2) Appliquons maintenant $\boxed{dy = f'(x_0)\cdot h}$ (*) à la fonction identité $f = id_{\mathbb{R}}$: on obtient **dy = 1 × h** .
Or, pour cette fonction f, on a y = x ; d'où, avec l'abus traditionnel: **dx = h**

et la formule (*) devient **dy = f '(x₀) dx** de laquelle on tire $\mathbf{f'(x_0) = \frac{dy}{dx}}$

Remarque : Si f est différentiable pour tout x d'un intervalle I, on note encore, par abus,
sa différentielle **dy = f'(x) dx** (ou **df(x)** = **f'(x) dx** , ou encore $\mathbf{f'(x) = \frac{dy}{dx}}$)

exemples : si y = f(x) = cos(x), alors dy = -sin(x) dx
si $y = f(x) = x^3$, alors $dy = 3x^2\, dx$

> **Note :** soit une fonction f et une de ses primitives F avec F'(x) = f(x) : on a noté $\mathbf{F(x)} = \int f(x)dx$;
>
> si l'on pose y = F(x), alors dF(x) = dy = F'(x) dx = f(x)dx et donc $\int f(x)dx = \int F'(x)dx = \boxed{\int dF(x) = \mathbf{F(x)}}$;
>
> de même dF(x) = $\boxed{\mathbf{d(}\int f(x)dx\mathbf{) = f(x)\ dx}}$; (ou encore $\int dF = F$ et $d\int f = f$)
>
> **la différentiation et l'intégration sont donc deux applications *inverses* l'une de l'autre.**

6.4 Quelques théorèmes

Les théorèmes sur les dérivées peuvent être reformulés à l'aide de la notion de différentielle (en commettant plus ou moins les abus vus plutôt) .

1) Soit f différentiable en x et g différentiable en y = f(x) ; soit z = g(y) = g[f(x)] .

Alors g o f est différentiable en x et on a : $\boxed{\mathbf{\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}}}$.

dém : On a y = f(x) d'où dy = f '(x) dx et $f'(x) = \frac{dy}{dx}$

z = g(y) d'où dz = g'(y) dy et $g'(y) = \frac{dz}{dy}$

z = (gof)(x) d'où dz = (gof)'(x) dx et $(gof)'(x) = \frac{dz}{dx}$

et (gof)'(x) = $g'(y)\cdot f'(x)$

$\Longrightarrow \frac{dz}{dx}=\frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}$

2) Soit f et g deux fonctions différentiables en x et définies par u = f(x) et v = g(x).
Alors f·g est différentiable en x et on a $\boxed{d(uv) = v\,du + u\,dv}$.

démonstration en exercice.

3) D'une manière analogue, tous les théorèmes concernant la dérivabilité peuvent être transcrits en termes de différentiabilité :

a) $d(u+v) = du + dv$
b) $d(ku) = k\,du$
c) $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}$
d) $d(\sin(u)) = \cos(u)\,du$
e) $d(u^3) = 3u^2\,du$
f) $d(\tan(u)) = (1 + \tan^2(u))\,du$ etc.…

§7 Méthodes d'intégration

7.1 Par substitution

Exemples d'introduction :

1) soit à calculer $\int (x^3+2)^2\, 3x^2\, dx$: on observe que $(x^3+2)' = 3x^2$, donc si l'on pose $f(x) = x^3+2$, alors l'intégrale s'écrit $\int f^2(x)\cdot f'(x)\,dx = \frac{1}{3} f^3(x) + c = \frac{1}{3}(x^3+2)^3 + c$.
Si l'on pose $t = f(x) = x^3 + 2$, on a $dt = 3x^2\,dx$, ce qui donne
$$\int (x^3+2)^2\, 3x^2\,dx = \int t^2\,dt = \frac{1}{3}t^3 + c = \frac{1}{3}(x^3+2)^3 + c$$
2) soit à calculer $\int \sin^3(x)\,dx$: on a $\int \sin^3(x)\,dx = \int \sin^2(x)\sin(x)\,dx = \int \left[(1-\cos^2(x)\right]\sin(x)\,dx$.
Si l'on pose $t = \cos(x)$, on a $dt = -\sin(x)dx$, ce qui donne
$$\int \sin^3(x)\,dx = \int \left[(1-\cos^2(x)\right]\sin(x)\,dx = \int \left(1-t^2\right)(-dt) = \int \left(t^2-1\right)dt = \frac{1}{3}t^3 - t + c = \frac{1}{3}\cos^3(x) - \cos(x) + c$$

Description de la méthode :

Soit à calculer $\int h(x)\,dx$, où h est une fonction définie sur un intervalle I. Supposons de plus qu'il existe une fonction f définie sur J dont on puisse facilement calculer les primitives et une fonction g : I $\rightarrow$ J telles que
g est dérivable et de dérivée continue sur I et $\forall$ **x $\in$ I, h(x) = f[g(x)] $\times$ g'(x)**
(dans l'exemple 1) on a : $h(x) = (x^3+2) \times 3x^2$, $f(t) = t^2$ et $g(x) = x^3+2$)

Alors, si F est une primitive de f sur J, F∘g est une primitive de h sur I.

Preuve : $(F\circ g)'(x) = F'[g(x)] \cdot g'(x) = f[g(x)]\cdot g'(x) = h(x)$

Conséquence :

On peut utiliser la méthode de substitution pour le calcul de $\int h(x)\,dx$ si l'on peut reconnaître dans h(x) une expression g(x) telle que **h(x) = f[g(x)] $\times$ g'(x)** , où g et f satisfont aux hypothèses décrites plus haut.
On pose alors t = g(x) et par conséquent dt = g'(x) dx. On peut alors écrire :

$$\boxed{\int h(x)\,dx = \int f[g(x)]\,g'(x)\,dx = \int f(t)\,dt = F(t) + c = F[g(x)] + c}$$

Remarque : Dans cette méthode, on introduit une nouvelle variable t qui est fonction de l'ancienne x la fonction g fait correspondre à tout x un nouveau t .

Application au calcul d'une intégrale définie :

Soit à calculer $\int_a^b h(x)\,dx$, où h est une fonction définie sur un intervalle I, avec que $\mathbf{h(x) = f[g(x)] \times g'(x)}$;

posons t = g(x) , d'où dt = g'(x) dx ; on a alors :

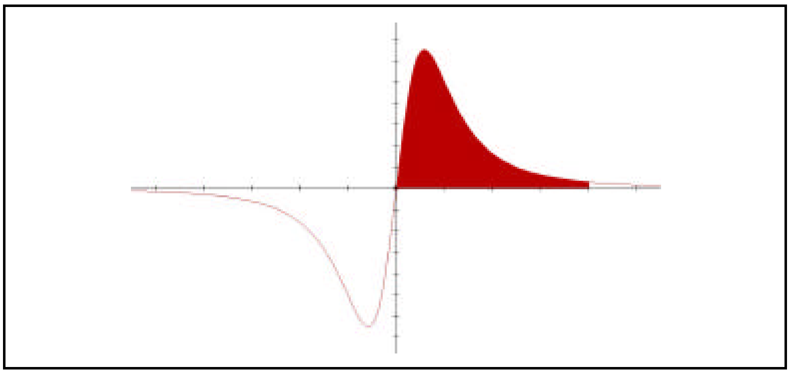
$$\boxed{\int_a^b h(x)\,dx = \int_a^b f[g(x)]\cdot g'(x)\,dx = [F(g(x))]_a^b = F(g(b)) - F(g(a)) = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\,dt}$$

Remarque :
Lors de la substitution donnée par t = g(x), les bornes d'intégration **a** et **b** sont à changer en **g(a)** et **g(b)**.

Exemple : soit à calculer $\int_0^4 \frac{2x}{(x^2+1)^2}\,dx$: on remarque que $(x^2+1)' = 2x$;

posons donc $t = x^2+1$ et dt = 2x dx , de plus si x = 4 alors $t = 4^2+1 = 17$ et si x = 0, alors $t = (0)^2 + 1 = 1$;

alors $$\int_0^4 \frac{2x}{(x^2+1)^2}\,dx = \int_1^{17} \frac{1}{t^2}\,dt = \left[\frac{-1}{t}\right]_1^{17} = \left(\frac{-1}{17}\right) - \left(\frac{-1}{1}\right) = \frac{-1}{17} + 1 = \frac{16}{17} \text{ u.s.}$$



7.2 Intégration par " parties "

Si u et v sont deux fonctions dérivables (donc différentiables) sur un intervalle I, nous avons vu que

$$\mathbf{d(uv) = v\,du + u\,dv}$$

d'où $\mathbf{u\,dv = d(uv) - v du}$

et alors $$\int u\,dv = \int [d(uv) - v du] = \int d(uv) - \int v du = uv - \int v du$$

ou encore $$\boxed{\int u(x)\ v'(x)\,dx = u(x)\ v(x) - \int v(x)\ u'(x)\,dx}$$

Exemples : 1) soit à calculer $\int x\cos(x)\,dx$:

posons les " parties " :	u = x du = dx	dv = cos(x) dx v = sin(x)

D'où $\int x\cos(x)\,dx = x\sin(x) - \int \sin(x)\,dx = x\sin(x) - (-\cos(x)) + c = x\sin(x) + \cos(x) + c$.

2) pour les intégrales définies on a : $\boxed{\int_a^b u\,dv = [u\,v]_a^b - \int_a^b v\,du}$